# Содержание

# Введение

Геометрия является, одной из древнейших ветвей математики. Корнями она уходит во времена Вавилона и Египта, когда еще только происходило становление письменности и цивилизаций. С течением времени она развивалась от примитивной Египетской планиметрии, но до XIX века так и не был решен один из вашнейших вопросов: можно ли доказать пятый постулат Евклида о параллельных прямых? Лишь открытия Саккери и Ламберта, Гаусса и Швейкарта и, наконец, работы Лобачевского, положили конец попыткам доказать ее.

# 1 Доевклидова геометрия

Хотя математика в древности была не очень развита, не стоит считать что ее не было совсем. В Вавилоне получили развитие начала алгербы, была изобретена шестидесятиричная система счисления, которой мы пользуемся и по сей день измеряя время. В Египте, напротив, алгебра не получила такого развития, но была построена довольно сложная и развитая геометрическая наука. В основном, она существовала в прикладных целях у землемеров и архитекторов, однако не стоит недооценивать их. Многие результаты не могли бы быть получены без глубокого понимания предмета и умения вести доказательства в виде, хоть и отличном от принятого сегодня, но в некотором роде напоминающем его. Хотя в общем состояние античной науки может быть характеризовано следующим доказательством. Индиец Ганези за 2 тысячи лет до нашей эры показал что площадь круга равна площади прямоугольника с основанием равным половине длины окружности и высотой равной радиусу. Чертеж, нарисованый на стене храма, сопровождается надписью «Смотри». Так и большинство других доказательств апеллируют к наглядности и визуальной понятности.

Но к V – VI векам до нашей эры стала оформляться понимание, что строгие доказательства необходимы в математики, что явное озвучивание предпосылок рассуждения так же необходимо, как и отказ от наглядных переходов, подменяющих собой строгие рассуждения. Многие поклонники Платона (430 - 350 гг до н.э.) приписывают ему решающую роль в этом. Так, Виндельбанд пишет: «Платон внес в математическое исследованое требование, по которому исходить должно из определений и аксиом» [1]. Конечно, утверждать что это исключительно заслуга Платона нельзя, но и умалять его роль тоже не стоит. Во многом он оформил те мысли которые уже существовали до него, но и это большой труд.

При этом, не стоит думать что наивный подход к доказательствам присущ исключительно древним цивилизациям. Артур Шопенгауэр (1788 – 1860) пишет:

«Было понятно, что чувственному созерцанию нельзя доверять безусловно, и отсюда поспешно заключили, будто одно лишь разумное логическое мышление служит порукой истины, хотя Платон (в "Пармениде"), мегарцы, Пиррон и новые академики показали на примерах (как позднее в том же роде Секст Эмпирик), что, с другой стороны, умозаключения и понятия тоже вводят в заблуждение и даже влекут за собой паралогизмы и софизмы, которые возникают гораздо легче и разрешаются гораздо труднее, чем призрачность в чувственном созерцании. И тем не менее, рационализм, возникший в противовес эмпиризму, одержал верх, и в соответствии с ним Евклид обработал математику, поневоле обосновывая наглядной очевидностью только одни аксиомы, а все остальное – умозаключениями.»[2]

Однако вернемся к развитию геометрии в античной Греции. По мнению Прокла (410 – 485 года н.э.), одного из наиболее известных комментаторов Евклида, большое влияние на становление геометрии в Греции оказал Фалес Милетский, по возвращении из Египта привезший многие результаты и знания египетских жрецов. Геометрия развивалась и, ко времени написания Евклидом «Начал» была уже достаточно сложна чтобы потредовалось ее систематическое изложение с позиций обозначеных Платоном.

# 2 Евклидова геометрия

## 2.1 Начала

Стоит немного рассказать о судьбе этой книги. Будучи основанием для последующего развития геометрии она множество раз переписывалась и переводилась. При этом в нее вносились как комментарии, так и непосредственные изменения. Иногда переписчики меняли какие-либо утверждения на те, которые им казались более правильными, иногда вносили более раннние комментарии в основной текст. Это привело к возникновению множества версий, значительно отличавшихся друг от друга. Особенно сильно пострадали от этого определения и постулаты. Впоследствии начали пытаться восстановить оригинальный текст Евклида, насколько это удалось — не может уже сказать никто. Тем не менее стоит отметить труды француза Пейрара и, особенно, Гейберга и Менге, которые собрали около десяти различных версий и сличая их создали текст Начал, считающийся на данный момент наиболее близким к оригиналу.

### 2.1.1 Постулаты и аксиомы

В тексте Начал даны 5 аксиом и 3 аксиомы[3]. Опираясь на них Евклид и строит свою геометрию. *Постулаты:*

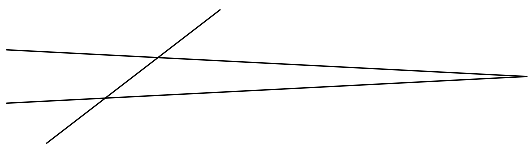
1. Чтобы от каждой точки к каждой точке можно было провести прямую линию

2. И чтобы отграничченую прямую можно было непрерывно продолжить по прямой

3. И чтобы вокруг любого центра на любом расстоянии [с любым радиусом] можно было провести окружность.

4. И чтобы все прямые углы были друг другу равны

5. И чтобы всякий раз, как прямая, пересекая две прямые, образует с ними внутренние односторонние углы, составляющие [вместе] меньше двух прямых, эти прямые при неограничченом продолжении пересекались с той стороны, с которой эти углы составляют меньше двух прямых.[4]



Сразу бросается в глаза сложность пятого постулата, насколько он отличается от первых четырех.

*Аксиомы:*

1. [Вещи и величины] равные одной и той же [вещи или величине], равны между собой.

2. И если равным придать равные, то получаются равные.

3. И если от равных отнять равные, то получаются равные.

4. И [вещи], которые могут быть приведены в совмещение друг с другом, равны друг другу. [5].

Последняя аксиома имеет явно геометрический смысл, однако в отсутствии определения движения не очень строга. Не соглашаясь с явным выделением аксиом в качестве базиса дальнешего повествования Шопенгауэр пишет: «Правда, в математике, как ее строит Евклид, только аксиомы представляют собой недосказуемые главные положения, а все доказательства подчиняются им в строгой последовательности. Однако такое построение не связано с сущностью математики, и на самом деле каждая теорема начинает собой новую пространственную конструкцию, которая сама по себе независима от предыдущих и может быть познана, собственно говоря, совершенно независимо от них, сама из себя, в чистом созерцании пространства, где даже самая запутанная конструкция в сущности так же непосредственно очевидна, как и аксиома;»[6]

### 2.1.2 Пятый постулат

Видимо сам Евклид понимал, насколько сложен и запутан пятый постулат и как разительно отличается он от остальных. Его геометрию можно разбить на две части, как она и делится книга «Начала»: часть, не опирающаяся на постулат о параллельных и другая, использующая ее. Первую Иоанн Больяи называл «абсолютной геометрией» и, хотя термин не очень точен, он прижился в литературе. Вторая иногда называется собственно евклидовой геометрией.

Практически сразу начали появляться попытки перевести V постулат в разряд теорем и доказать его. Уже Аристотель в «Аналитике» приводит рассуждения по этому поводу. Прокл пишет: «Это положение должно быть совершенно изъято из числа постулатов, потому что это — теорема, вызывающая много сомнений, которые Птолемей пытался устранить в одной из своих книг; однако, его доказательство требует многих определений и теорем; и сам Евклид дает обращение этого предложения в качестве теоремы.»[7] Имеется ввиду, что постулаты не требуют доказательств и, если, таковое требуется, то это уже теорема. Он продолжает: «Что же, в случае прямых линий не может иметь место то, что бывает в случае других линий? До тех пор пока мы это не обнаружим путем доказательства, свойства, свойства которые могут проявляться при неограниченом продолжении других линий, тяготеют над нашим воображением.» Он заключает: «Ибо необходимо обнаружить его справедливость, но не как нечто представляющееся нам очевидным без доказательства, а как предложение, становящееся таковым благодаря доказательству.»[8]

Здесь стоит привести еще одно высказывание Шопенгауэра по поводу доказательств. Он пишет: «Точно так же и пифагорова теорема знакомит нас с qualitas occulta прямоугольного треугольника; ходульное, даже коварное доказательство Пифагора оставляет нас беспомощными при вопросе почему, между тем как прилагаемая уже известная нам простая фигура при первом же взгляде на нее уясняет дело гораздо лучше этого доказательства и внушает глубокое внутреннее убеждение в необходимости этого свойства и его зависимости от простого угла.»[9]

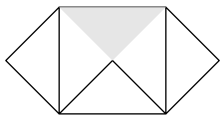


Рис. 1: Доказательство теоремы Пифагора по Шопенгауэру.

## 2.2 Попытки доказательства

В течении двух тысяч лет с момента написания Евклидом «Начал» как люди далекие от геометрии, так и искушенные в ней пытались доказать пятый постулат. В 1763 году Клюгель (Klügel), ученик профессора Кестнера, занимавший кафедру Евклида в Гёттингенском университете пишет диссертацию «Обзор важнейших попыток доказательста теоремы о параллельных». В ней он разбирает около 30 различных доказательств и показывает их несостоятельность в том или ином плане. Он заключает:

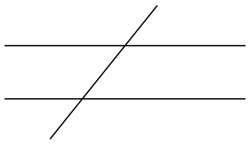
«Многие, опытные в геометрических доказательствах, пытались устранить эту истину из числа аксиом; но все доказательства, которыми они эту истину старались строго установить, оказались порочными. Другие предлагали заменить ее иными аксиомами, которые, однако, не могут считаться более ясными, чем постулат Евклида.

Таким образом, если обозреть все попытки, то окажется совершенно правильным, что Евклид поместил это предложение среди аксиом.»[10]

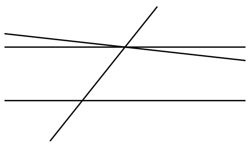
Позже, в 1854 году в труде «Параллельные линии» дает следующую классификацию попыток доказательств. Он их делит на четыре вида. К первому относятся те, которые непосредственно или после рядя переходов переформулируют V постулат, такие как доказательства Прокла, Насир-Эдина, Валлиса.

a. Если прямые параллельны, то при пересеченнии их третьей прямой соответственные углы равны.

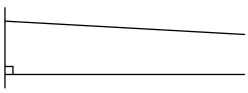
b. Если прямые параллельны, то при пересечениии их третьей прямой внутренние накрестлежащие углы равны.



c. Через точку лежащую вне данной прямой можно только одну прямую параллельную данной.



d. Перпендикуляр и наклонная к одной и той же прямой, расположенные в одной плоскости, пересекаются (со стороны острого угла). Определение использованное Лежандром.



Сюда же Буняковский относит те, которые используют альтернативные определения параллельности, некоторые из которых приведены ниже

- Параллельными называются такие прямые, которые находясь в одной плоскости, не сближаются и не удаляются одна от другой, так что все перпендикуляры проведенные из точек одной из них к другой, равны между собой. Это определение использовали Посейдоний, Симплиций, Агинус.

- Параллельные прямые определюятся как такие, которые встречаются в бесконечно удаленной точке. Это определение сходно с параллельностью в проективных пространствах, однако на сегодняшний день она вводится иным образом.

- Параллельными называются линии, расположеные в одной плоскости и имеющие одно и то же направление. Это скорее физическое определение, однако в отсутсвии определения «направления» не может считаться строгим.

Ко второй категории Буняковский относил те, которые оперировали бесконечно малыми или бесконечно большими величинами, как, например доказательство Бертрана опубликованное в 1778 году и ведущееся через «размер» угла на плоскости.

К третьей категории относятся доказательства основанные на однородности, например, приведенное Лежандром. Он предпологал, что из условия $C = \varphi(A, B, c)$, где $A, B, C$ — углы треугольника, а $c$ — сторона противолежащая углу $C$, следует, что $c$ в выражение $\varphi$ входить не может, откуда уже получал что сумма углов треугольника $A+B+C = \pi$, то есть два прямых угла. Однако Гаусс в переписки с ним замечал, что в $\varphi$ может входить линейная величина $m$ что сводит на нет все рассуждения Лежандра.

К четвертой, и последней, категории, Буняковский относил доказательства основанные на физических или механических рассуждениях, например такое. Разобьем прямую на равные отрезки и в каждой из точек приложим одинаковые силы. Тогда прямая сдвинется относительно себя каким-то образом. Далее авторы продолжали доказательство, не замечая что «приложение сил» и «движение» не имеют строгого определения.

# 3 Неевклидова геометрия

Однако попытки доказать пятый постулат не прекращались. Однако развитие науки привело к тому усовершенствованию методов доказательств и стало возможным построение сложных абстрактных теорий. Так, в своих работах Саккери и Ламберт доказывая от противного предвосхотили геометрию Лобачевского, однако по тем или иным причинам не стали ее развивать.

## 3.1 Саккери

Джироламо Саккери, итальянский монах, наверное был первым кто начал развивать неевлидову геометрию. В 1733 году появилась его работа «Евклид, очищенный от всех пятен, или же геометрическая попытка установить первые начала всей геометрии». Основываясь на работах предшественников он попытался доказать пятый постулат от противного. Его доказательство начиналось с того, что строился прямоугольник

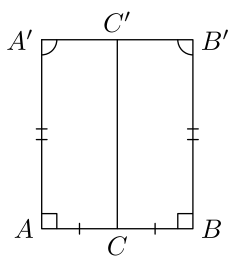



Рис. 2: Прямоугольник Саккери

Если перевернуть $ABB'A'$ и наложить его на себя, поскольку стороны $AA'$ и $BB'$ и углы при $A$ и $B$ равны, это возможно, то углы при $A'$ и $B'$ тоже равны, $CC' \perp AB$ и $CC' \perp A'B'$. Далее возможны три случая, что угол $A'$ острый, прямой или тупой. В последнем случае опираясь на второй постулат он довольно быстро приходит к противоречию. Во втором — получается обычная евклидова геометрия. С первым же случаем, который он назвал «гипотеза острого угла» все значительно сложнее. Пытаясь найти противоречие, он строит абстрактную геометрию, основаную на этой гипотезе и в конце концов в XXXIII теореме он допускает ошибку. Он утверждает, что если две прямые неограничено сходятся, то они пересекаются в бесконечно удаленной точке и в ней можно провести к ним общий перпендикуляр, что по его мнению «противоречит природе прямой линии». Он пишет: «Гипотеза острого угла совершенно ложна ибо противоречит природе прямой линии»[11]. Но, видимо, осознавая слабость этого доказательства, он приводит еще одно, но тоже не строгое. Оба они пали жертвой слабого понимания как можно оперировать бесконечно малыми или большими величинами и какими свойствами обладают бесконечно удаленные точки.

## 3.2 Ламберт

И.Г. Ламберт в 1766 издает «Теорию параллельных», которую стоит особо отметить. Начиная, как и Саккери от прямоугольника, один угол которого может быть острым, прямым или тупым, он также строит доказательство от противного.

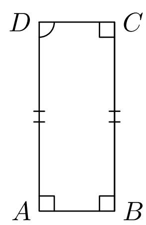



Рис. 3: Прямоугольник Ламберта

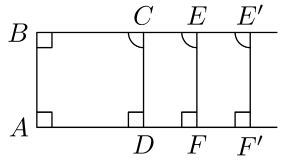



Рис. 4: Построения Ламберта

Однако в развитии абстрактной геометрии основаной на «гипотезе острого угла» он продвинулся значительно дальше и, более того, вывел несколько значительных наблюдений. Получив результат, что площадь треугольника и его угловой дефект связаны, он проводит аналогию со сферическими треугольниками. И хотя казалось бы очевидным, что достаточно потребовать неограничености площади треугольника чтобы опровергнуть гипотезу острого угла, он не поддается на это искушение понимая что это требование по сути аналогичное пятому постулату. Он пишет:

«Мне кажется очень замечательным, что вторая гипотеза оправдывается, если вместо плоских треугольников возьмем сферические. Я из этого почти должен был бы сделать заключение, что третья гипотеза имеет место на какой-то мнимой сфере. Во всяком случае должна же существовать причина, почему она не так легко поддается опровержению, как это могло быть сделано в отношении второй гипотезы»

Получив, что в этом случае мера длины не вводится каким-либо эталоном, а может быть задана аналитически он пишет «В этом есть что-то замечательное восхитительное, что вызывает даже желание чтобы третья гипотеза была справедлива! И все же я желал бы, несмотря на это приемущество, чтобы это было не так, потому что это было бы сопряжено с целым рядом других неудобств»[12]

Не придя к явному противоречию, он вслед за Клюгелем заключает, что Евклид был прав, не поместив пятый постулат среди теорем. Ламберт совершил большой шаг вперед по сравнению с Саккери, признав что построения на основе гипотезы острого угла вполне имеют место. Однако это не было еще тем открытием, которое совершил Лобачевский.

## 3.3 Швейкарт

Стоит отметить еще и Швейкарта, развивавшего так называемую «астральную геометрию». Про противоречие с ограниченой площадью треугольника он пишет:

«Если же эта константа [высота прямоугольного треугольника] для нас равна радиусу Земли (в каковом случае всякая линия, проведенная в пространстве от одной неподвижной звезды к другой, отстоящей от нее на 90 градусов, была бы касательной к земному шару), то она бесконечно велика по сравнению с протяжениями, которые мы встречаем в повседневной жизни.

Евклидова геометрия имеет место только в том случае, если константа бесконечно велика. Только в этом случае сумма углов каждого треугольника равна двум прямым, и это легко доказать, если принять, что константа бесконечно велика»[13]

## 3.4 Открытие

Однако все предыдущие работы хоть и приближались к открытию неевклидовых геометрий, не делали последнего шага. Лишь в 1826 году Лобачевский выступает с докладом на эту тему. Про предшествующие этому открытию работы в мемуарах «Воображаемая геометрия» он пишет:

«Кто ни думал найти решение затруднительного вопроса, все бещ исключения ошибались, будучи предубеждены в справедливости того, что не может еще следовать из наших понятий о телах без пособия наблюдений»[14]

Понимая, что если две тысячи лет ученые бьются над решением задачи, то скорее всего она неправильно сформулирована, он начинает развивать геометрию, аналогичную той, что строили Саккери и Ламберт. Но в отличии от них, он понимает, что пятый постулат Евклида может нарушаться. В 1835-38 гг. Лобачевский публикует более развитое изложение своей теории «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных», в предисловии к которому пишет:

«Напрасное старание со времен Евклида, в продолжении двух тысяч лет, заставило меня подозревать, что в самих понятиях еще не заключается той истины, которую хотели доказывать и которую проверить, подобно другим физическим законам, могут лишь опыты, каковы, например, астрономические наблюдения».[15]

В отличии от Гаусса, который тоже имел результаты в этой области, он не побоялся выступить с ними и опубликовать их. Гаусс, хотя и имел в то же время что и Лобачевский результаты по неевклидовой геометрии, не высказывал их. В 1829 г. в письме к Бесселю он писал: "Я опасаюсь крика беотийцев, если выскажу мои воззрения...". Он боялся подорвать свой научный авторитет.[16]

# 4 Заключение

Впоследствии, появились геометрические и аналитические интерпретации геометрии Лобоачевского, предложеные, в частности, Клейном и Бельтрами, появилась геометрия Римана, получила развитие «гипотеза тупого угла».

И хотя наглядное подверждение появилось значительно позже, именно работы Лобачевского положили конец попыткам доказать пятый постулат Евклида.

Хотелось бы закончить высказыванием академика Александрова в статье посвященной геометрии Лобачевского: «Попытки доказать пятый постулат были, как мы выяснили раньше, совершенно естественными. Но 2000 лет никто не догадывался, что доказательство невозможно. Никто не мог подумать, что возможна какая-то геометрия, отличная от привычной евклидовой. Ее неразрывная связь с нашим пространственным опытом и наглядным представлением, ее логическое совершенство и прозрачность, вековые традиции ее изучения и, можно сказать, исповедания - все это делало геометрию Евклида непререкаемой, как бы абсолютно необходимой, присущей и миру, и разуму. Ее происхождение из практики затмевалось совершенством и ясностью ее логики.»[17]

# Ссылки

[1]По книге Каган В.Ф. Основания геометрии. часть 1. глава 1(?)

[2]Шопенгауэр. Мир как воля и представление. кн. 1, гл. 15

[3]В переводе с «Начал» Гейберга и Менге

[4]По книге Каган В.Ф. Основания геометрии. часть 1, стр. 43

[5]Там же, стр. 43

[6]Шопенгауэр. Мир как воля и представление. кн. 1, гл. 14

[7]По книге Каган В.Ф. Основания геометрии. часть 1, стр. 112

[8]Там же, стр. 113

[9]Шопенгауэр. Мир как воля и представление. кн. 1, гл. 15

[10]По книге Каган В.Ф. Основания геометрии. часть 1, стр. 114

[11]По книге Каган В.Ф. Основания геометрии. часть 1, стр. 147

[12]Там же, стр. 150

[13]Записка Швейкарта по мемуарам Я.П. Бланка. "Страницы истории развития геометрии и кафедры геометрии Харьковского государственного университета"

[14]По книге Каган В.Ф. Основания геометрии. часть 1, стр. 152

[15]По статье Александров А.Д. Тупость и гений.

[16]Там же

[17]Там же